Moyenne de Césaro

Thème abordé : convergence des suites numériques

On appelle suite des moyennes de Césaro associée à une suite réelle (u_n) la suite (σ_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sigma_n = \frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}{n+1}.$$

L'objectif du problème est d'étudier la convergence de (σ_n) en fonction de propriétés portées par (u_n).

Partie I - Cas d'une suite monotone et convergente

On suppose dans cette partie que (u_n) est une suite croissante de limite $\ell \in \mathbb{R}$.

On introduit sa suite des moyennes de Césaro (σ_n) définie comme en introduction.

1.a Montrer que la suite (σ_n) est croissante.

1.b Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \sigma_n \leq \ell$. Que peut-on en déduire ?

2.a Etablir $\forall n \in \mathbb{N}, \sigma_{2n+1} \geq \frac{1}{2}\sigma_n + \frac{1}{2}u_{n+1}$.

2.b En déduire que (σ_n) converge vers ℓ.

3. Que dire de la suite des moyennes de Césaro d'une suite décroissante de limite $\ell \in \mathbb{R}$?

Partie II - Cas d'une suite convergente

Soit (u_n) une suite réelle convergent vers $\ell \in \mathbb{R}$. Pour tout $\varepsilon > 0$.

1.a Justifier qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$ entraîne : $|u_n - \ell| \leq \varepsilon/2$.

1.b Etablir que pour tout entier $n > n_0$ on a :

$$|\sigma_n - \ell| \leq \frac{|u_0 - \ell| + \cdots + |u_{n_0} - \ell|}{n+1} + \frac{|u_{n_0+1} - \ell| + \cdots + |u_n - \ell|}{n+1}.$$

1.c Montrer qu'il existe $n_1 > n_0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > n_1$ entraîne : $\frac{|u_0 - \ell| + \cdots + |u_{n_0} - \ell|}{n+1} \leq \varepsilon/2$.

2. Conclure que (σ_n) converge vers ℓ.

3. On suppose ici que la suite (σ_n) converge vers le réel ℓ. On se propose d'étudier une réciproque du résultat précédent.

3.a Montrer que la suite (u_n) n'est généralement pas convergente. On pourra exhiber un contre-exemple.

3.b Montrer que la suite (u_n) n'est pas nécessairement bornée. On pourra considérer la suite (u_n) définie par $u_n = \begin{cases} p \text{ si } n = p^3 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

3.c On suppose en outre que la suite (u_n) est monotone ; on pourra considérer, par exemple, qu'elle est croissante. Montrer alors par l'absurde que la suite (u_n) est majorée par ℓ. Conclure.

Partie III - Cas des suites périodiques

Soit $T \in \mathbb{N}^*$ et (u_n) une suite réelle T périodique i.e. telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+T} = u_n.$$

On introduit sa suite des moyennes de Césaro (σ_n) définie comme en introduction.

On pose aussi

$$s=\frac{1}{T}(u_0+u_1+\cdots+u_{T-1})\,.$$

1. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $s=\dfrac{u_n+u_{n+1}+\cdots+u_{n+T-1}}{T}$.

2. On considère la suite (v_n) de terme général : $v_n=(n+1)\sigma_n-(n+1)s$.

2.a Montrer que (v_n) est T périodique.

2.b En déduire que (v_n) est bornée.

2.c Etablir que (σ_n) converge et préciser sa limite.

Correction

Partie I

1.a $\sigma_{n+1}-\sigma_n=\dfrac{(n+1)u_{n+1}-(u_0+\cdots+u_n)}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{(u_{n+1}-u_0)+\cdots+(u_{n+1}-u_n)}{(n+1)(n+2)}\geq 0$.

1.b (u_n) est une suite croissante de limite ℓ donc $\forall n\in\mathbb{N},u_n\leq\ell$. Par suite $\forall n\in\mathbb{N},\sigma_n\leq\dfrac{\ell+...+\ell}{n+1}=\ell$.
(σ_n) est croissante et majorée par ℓ donc elle converge vers une limite $\ell'\leq\ell$.

2.a $\sigma_{2n+1}=\dfrac{u_0+\cdots+u_n+u_{n+1}+\cdots+u_{2n+1}}{2n+2}\geq\dfrac{u_0+\cdots+u_n+u_{n+1}+\cdots+u_{n+1}}{2n+2}=\dfrac{1}{2}\sigma_n+\dfrac{1}{2}u_{n+1}$.

2.b A la limite $\ell'\geq\dfrac{1}{2}\ell'+\dfrac{1}{2}\ell$ donc $\ell'\geq\ell$ puis $\ell'=\ell$.

3. Soit (u_n) une suite décroissante de limite ℓ et (σ_n) la suite de Césaro associée. Soit (v_n) définie par $v_n=-u_n$ et (τ_n) la suite de Césaro associée. Puisque (v_n) croît vers ℓ, (τ_n) croît aussi vers ℓ.
Or $\sigma_n=-\tau_n$ donc (σ_n) décroît vers ℓ.

Partie II

1.a Puisque $u_n\to\ell$: $\forall\varepsilon'>0,\exists n_0\in\mathbb{N},\forall n\in\mathbb{N},n>n_0\Rightarrow|u_n-\ell|\leq\varepsilon'$. En partant de $\varepsilon'=\varepsilon/2$ on a le résultat voulu.

1.b immédiat.

1.c $\dfrac{|u_0-\ell|+\cdots+|u_{n_0}-\ell|}{n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ donne l'existence de n_1.

2. $n>n_1$ entraîne : $|\sigma_n-\ell|\leq\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{(n-n_0)}{n+1}\dfrac{\varepsilon}{2}\leq\varepsilon$.

3.a Pour $u_n=(-1)^n$, $a_n\to 0$ et (u_n) diverge.

3.b $a_n=\dfrac{\sum_{p=0}^{E(\sqrt[3]{n})}p}{n+1}=\dfrac{\sqrt[3]{n}\left(\sqrt[3]{n}+1\right)}{2(n+1)}\sim\dfrac{1}{2\sqrt[3]{n}}\to 0$ et (u_n) n'est pas bornée puisque $u_{p^3}\xrightarrow[p\to+\infty]{}+\infty$.

3.c Supposons qu'il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que $u_{n_0}>\ell$. Pour tout $n\geq n_0$: $u_n\geq u_{n_0}$ donc
$\sigma_n=\dfrac{u_0+\cdots+u_{n_0-1}}{n+1}+\dfrac{u_{n_0}+\cdots+u_n}{n+1}\geq\dfrac{u_0+\cdots+u_{n_0-1}}{n+1}+\dfrac{n-n_0+1}{n+1}u_{n_0}$. A la limite quand $n\to+\infty$:
$\ell\geq u_{n_0}$. Contradiction. En fait, le raisonnement par l'absurde ne s'impose pas ici et le précédent raisonnement peut très bien être transposé pour former une démonstration directe.

Partie III

1. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
Pour $n = 0$: ok
Supposons la propriété établie au rang $n \geq 0$.
$s \underset{HR}{=} \dfrac{u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+T-1}}{T} = \dfrac{u_{n+1} + \cdots + u_{n+T-1} + u_{n+T}}{T}$ car $u_n = u_{n+T}$.
Récurrence établie.

2.a $v_{n+T} = (n+T+1)\sigma_{n+T} - (n+T+1)s = (u_0 + \cdots + u_{n+T}) - (n+1)s - \underbrace{(u_{n+1} + \cdots + u_{n+T})}_{Ts}$
donc $v_{n+T} = (u_0 + ... + u_n) - (n+1)s = (n+1)\sigma_n - (n+1)s = v_n$

2.b (v_n) est bornée par $M = \max(|v_0|, \ldots, |v_{T-1}|)$ car la périodicité de (v_n) permet de dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n \in \{v_0, \ldots, v_{T-1}\}$.

2.c $\sigma_n = s + \dfrac{v_n}{n+1} \to s$ car (v_n) bornée et $\dfrac{1}{n+1} \to 0$.